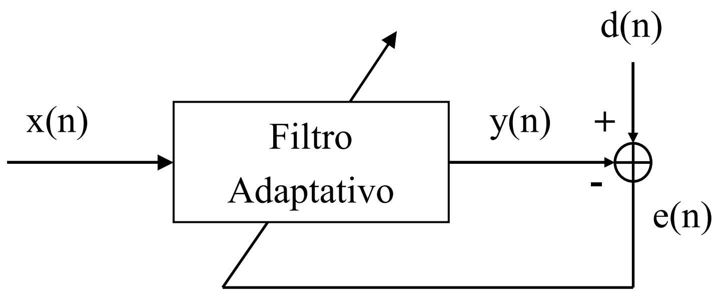
Sumário

- *Filtragem adaptativa numa perspetiva prática*
  - *conceito e exemplos*
  - *algoritmos de gradiente*
    - *filtragem ótima de Wiener*
    - *o método do gradiente mais negativo*
    - *o algoritmo LMS*

Filtros adaptativos

- Conceito
  - um filtro adaptativo é um filtro cujos coeficientes são ajustados, de forma adaptativa, em função de objetivos ou condições variáveis no tempo e traduzidos num sinal de erro



  - a aplicação típica consiste em suprimir ou modelizar certas componentes (possivelmente indesejáveis), representadas por *x(n)* e projetadas num sinal *d(n)*, de acordo com algum critério estatístico incidindo sobre o sinal de erro *e(n)*
  - o critério típico e prático para a adaptação dos coeficientes do filtro e otimização do seu desempenho é a minimização do valor médio quadrático do sinal de erro

- Conceito (*cont.*)

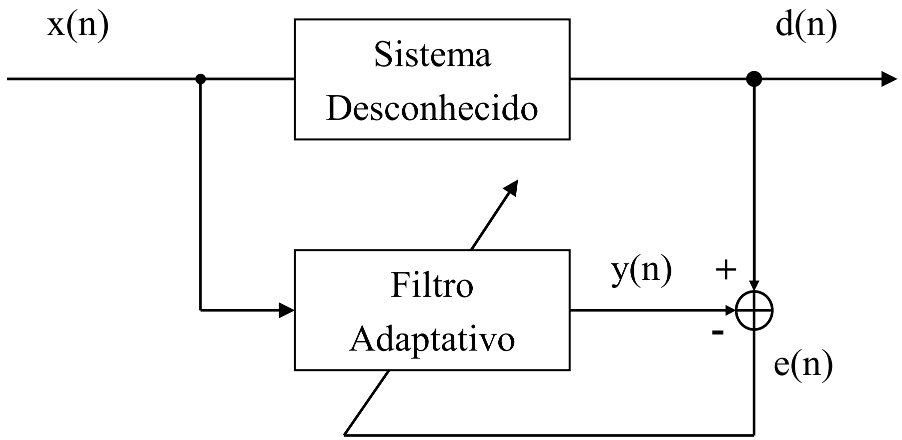
  - para entradas estacionárias e usando o critério de minimização de erro médio quadrático, o filtro ótimo é único e designa-se por filtro de *Wiener*; para entradas não estacionárias, os filtros de *Kalman* são mais adequados e eficientes (mas também implicam maior complexidade)

  - os filtros adaptativos podem ser do tipo FIR ou IIR, porém são quase sempre preferidas estruturas FIR já que, como se sabe, estas são intrinsecamente estáveis

- Exemplos

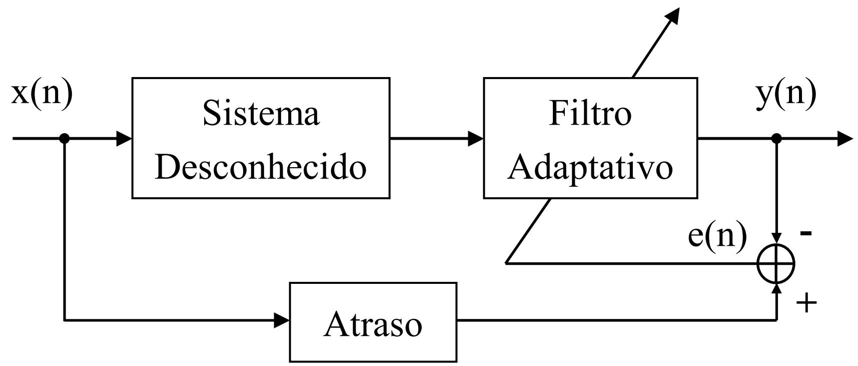
  - os filtros adaptativos são usados em diversas aplicações e contextos, tudo dependendo da forma como a resposta desejada do sistema adaptativo é caracterizada e extraída. Há essencialmente quatro tipos de aplicações: identificação, modelização inversa, predição, cancelamento de interferência.

• Identificação



– nestas aplicações, o filtro adaptativo é usado para fornecer um modelo linear que representa a melhor aproximação, de acordo com algum critério, a um sistema desconhecido

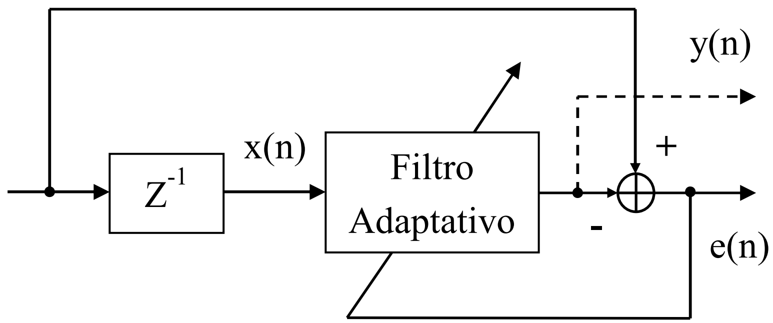
• Modelização inversa (igualização)



– nestas aplicações o filtro adaptativo tem por objetivo fornecer um modelo inverso que representa a melhor aproximação, de acordo com algum critério, a um sistema desconhecido

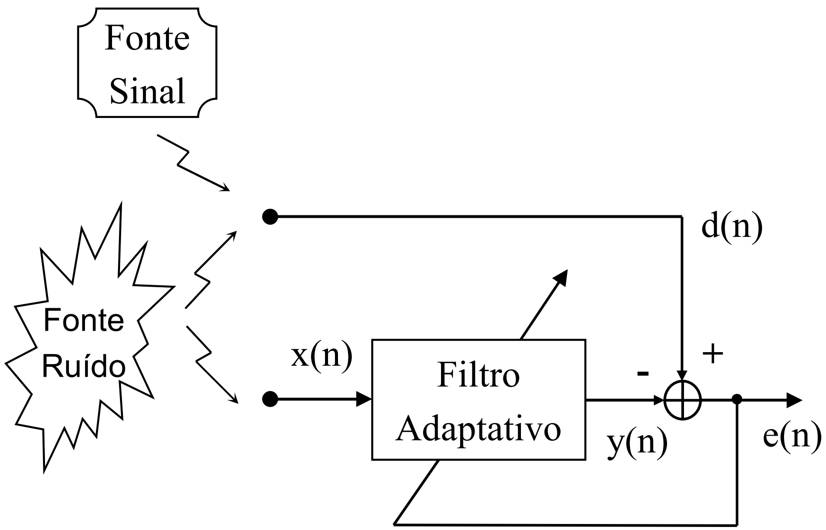
Exemplos de aplicações:
• descorrelação preditiva
• igualização adaptativa

- # Predição
  - nestas aplicações, o filtro adaptativo tem por objetivo fornecer a melhor predição para a evolução de um sinal com base no conhecimento do seu passado



Exemplos de aplicações:
- codificação linear preditiva (LPC)
- ADPCM
- análise espectral autoregressiva (AR)

- # Cancelamento de interferência
  - nestas aplicações o filtro adaptativo tem por objetivo cancelar uma interferência desconhecida e contida em *d(n)* mas refletida também no sinal de referência *x(n)*. O objetivo é simplesmente subtrair o "ruído" do sinal principal, de forma adaptativa, de modo a melhorar, à saída, a relação sinal-ruído.



Exemplos de aplicações:
- cancelamento adaptativo de ruído
- cancelamento de eco

Dado que o primeiro e último casos servem de base ao trabalho de laboratório, retiram-se a seguir algumas conclusões pertinentes a partir da análise aos sinais e operações implicados. Considerando que o sinal *d(n)=s(n)+x’(n)* contém uma parcela de informação útil a preservar *s(n)* e também uma componente de ruído a eliminar *x’(n)* e que este é também projetado em *x(n)*, tomam-se, como hipóteses realistas, as seguintes:

$$E\left[s(n)x'(n-k)\right]=0, \quad \forall k \qquad E\left[s(n)x(n-k)\right]=0, \quad \forall k \qquad E\left[x(n)x'(n-k)\right]=p(+k)$$

ou seja, *s(n)* é descorrelacionado com qualquer uma das duas representações do ruído e estas, por sua vez, exibem uma correlação cruzada dada por *p(k)* para uma distância *k*.

A saída do filtro adaptativo *y(n)* e o sinal de erro *e(n)* são dados por:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N-1} h_n(k)x(n-k) \qquad e(n)=d(n)-y(n)=s(n)+x'(n)-y(n)$$

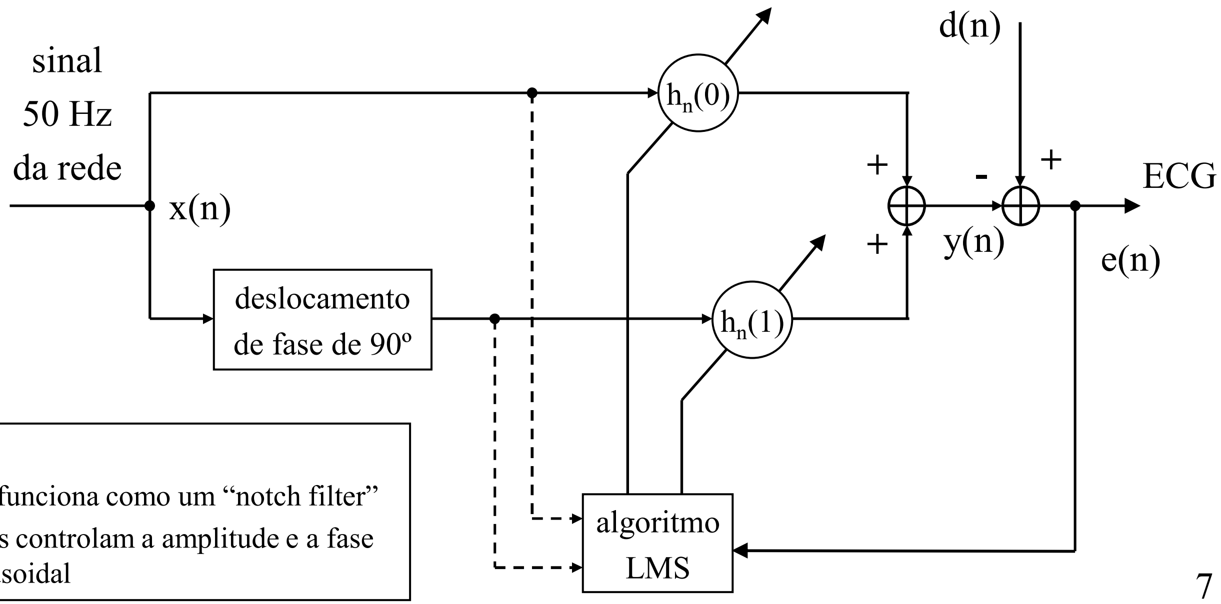
o que coloca em evidência que o sinal *s(n)* faz parte do sinal de erro. Porém, dadas as hipóteses anteriores, minimizar o erro médio quadrático de *e(n)* equivale a minimizar o erro médio quadrático do ruído indesejado dado por *e(n)-s(n)=x’(n)-y(n)*, o que significa que *s(n)* não é afetado pelo processo de filtragem adaptativa.

Como casos limite de operação do filtro adaptativo temos duas situações, a primeira em que *y(n)=x'(n)* e a segunda em que $\boxed{E\left[d(n)x(n-k)\right]=0, \quad \forall k}$.

No primeiro caso a operação de filtragem é efetiva, cancelando todo o ruído. No segundo caso, o sinal de referência é completamente descorrelacionado com o sinal primário, fazendo com que o filtro adaptativo se "auto-desligue", produzindo *y(n)=0*, o que não afeta o sinal principal.

– EXEMPLO 1

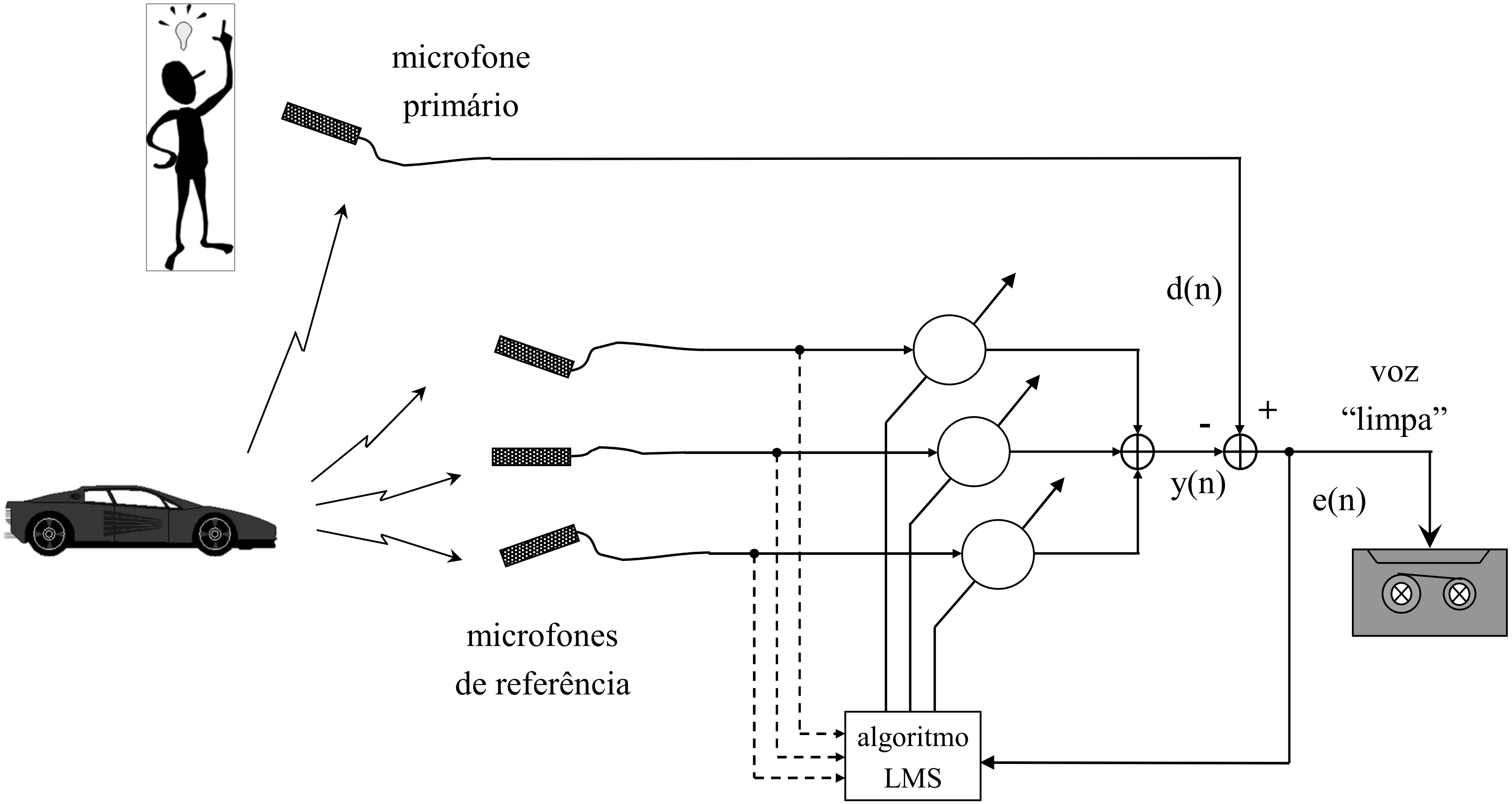
- Cancelamento da interferência sinusoidal de rede (50 Hz) num eletrocardiograma usando somente dois coeficientes



NOTAS:
• o filtro adaptativo funciona como um "notch filter"
• os dois coeficientes controlam a amplitude e a fase da interferência sinusoidal

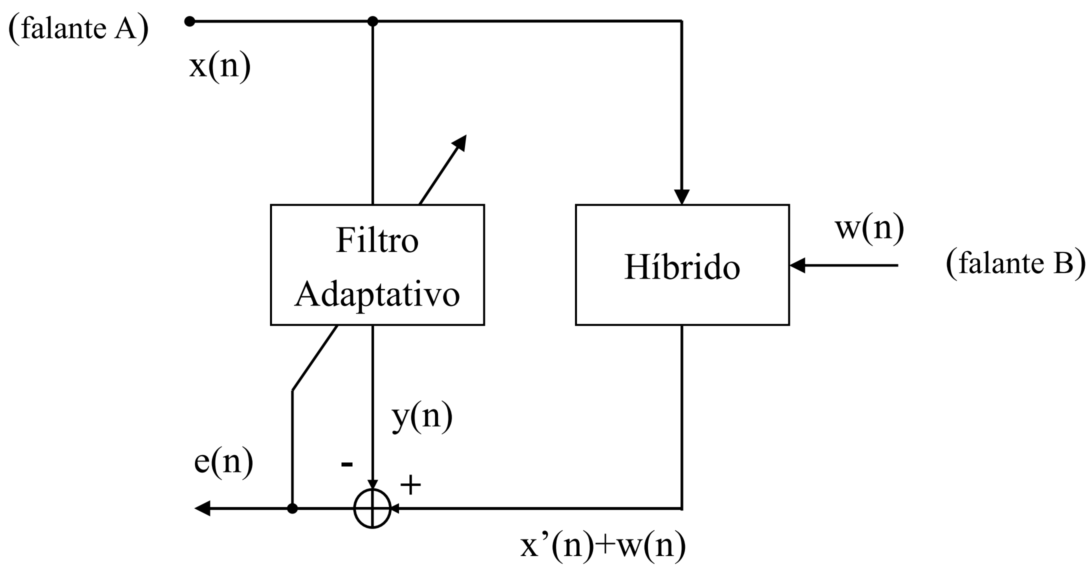
– EXEMPLO 2

- Redução / cancelamento de ruído acústico em sinais de voz (é possível melhorar a a relação sinal/ruído em mais do que 10 dB)



NOTAS:
- o algoritmo de adaptação pode ser o "LMS" ou outro alternativo
- os microfones de referência devem situar-se suficientemente longe do falante de modo a captarem quase exclusivamente só o ruído

- Cancelamento de eco em circuitos telefónicos

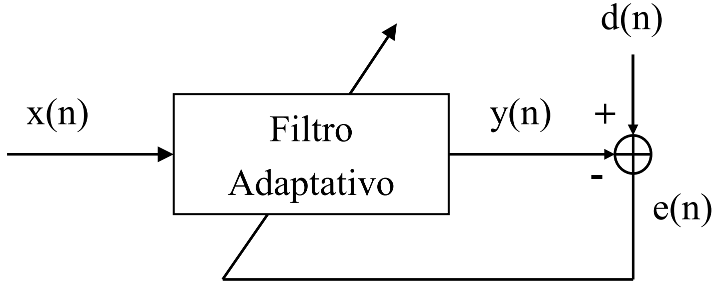


NOTAS:
- o objectivo do filtro adaptativo é sintetizar uma réplica do eco, perto do seu ponto de geração, e subtraí-la do sinal de retorno
- idealmente, o filtro adaptativo aproxima a função de transferência de retorno do eco

Nota introdutória sobre o algoritmo LMS, o que é afinal ?
trata-se de um algoritmo de gradiente estocástico, no sentido em que itera o peso de cada coeficiente de um filtro transversal (FIR) na direção do gradiente negativo da função amplitude quadrada de um sinal de erro, em ordem ao peso desse coeficiente; detalhes seguem nos ‘slides’ seguintes ...

Algoritmos de Gradiente

- Filtragem de *Wiener*
  - dado o sistema adaptativo já ilustrado anteriormente:



será: $$e(n) = d(n) - y(n) = d(n) - \sum_{k=0}^{N-1} h_n(k)x(n-k)$$

admitindo as hipóteses anteriormente consideradas e admitindo vetores complexos, será para a função de erro a minimizar:

$$J = E\left\{e(n)e^*(n)\right\} = E\left\{\left[d(n) - \sum_{k=0}^{N-1} h_n(k)x(n-k)\right]\left[d^*(n) - \sum_{\ell=0}^{N-1} h_n^*(\ell)x^*(n-\ell)\right]\right\}$$

$$J = \underbrace{E\left\{\left|d(n)\right|^2\right\}}_{\sigma_d^2} - \sum_{\ell=0}^{N-1} h_n^*(\ell)\underbrace{E\left\{d(n)x^*(n-\ell)\right\}}_{p(+\ell)} - \sum_{k=0}^{N-1} h_n(k)\underbrace{E\left\{d^*(n)x(n-k)\right\}}_{p^*(+k)} + \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{N-1} h_n(k)h_n^*(\ell)\underbrace{E\left\{x(n-k)x^*(n-\ell)\right\}}_{r(\ell-k)}$$

sendo σ^2 a variância de *d(n)* cuja média se supõe nula, $p(\ell)$ e $p^*(k)$ representam a correlação cruzada entre o sinal *d(n)* e a entrada *x(n)* e $r(\ell\text{-}k)$ representa a correlação da entrada para uma distância ℓ-k.

Abreviadamente será: $$J=\sigma_d^2-\sum_{\ell=0}^{N-1}h_n^*(\ell)p(+\ell)-\sum_{k=0}^{N-1}h_n(k)p^*(+k)+\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell=0}^{N-1}h_n(k)h_n^*(\ell)r(\ell-k)$$

o que revela que quando os sinais *x(n)* e *d(n)* são conjuntamente estacionários, a função do erro quadrático médio é uma função de 2ª ordem dos coeficientes do filtro FIR. Mostra-se que [Simon Haykin, "Adaptive Filter Theory", Prentice-Hall, 1991] que se este filtro possuir N coeficientes, a superfície de erro é uma superfície hiperparabolóide de N+1 dimensões com um mínimo global e sem mínimos locais.

O mínimo global ocorre em J_{MIN} onde se verifica que o vetor gradiente é identicamente nulo, ou seja: $$\nabla_k(J)=0,\qquad k=0,1,\ldots,N-1$$

Assumindo coeficientes *h(k)* reais, o vetor gradiente, $$\nabla_k(J)=\frac{\partial J}{\partial h(k)}$$ concretizado na expressão *J* produz:

$$\nabla_k(J)=-2p(+k)+\sum_{\ell=0}^{N-1}h_n(\ell)r(\ell-k)+\sum_{s=0}^{N-1}h_n(s)r(k-s)=-2p(+k)+2\sum_{\ell=0}^{N-1}h_n(\ell)r(\ell-k)$$

pelo que se conclui que os coeficientes ótimos são os que verificam:

$$\boxed{\sum_{\ell=0}^{N-1}h_n(\ell)r(\ell-k)=p(+k)}$$

a solução deste sistema de equações é conhecida como a solução de Wiener-Hopf que fornece o filtro ótimo (filtro de Wiener).

Ilustração de superfície hiperparabolóide (suave e convexa) quando o número de coeficientes é 2

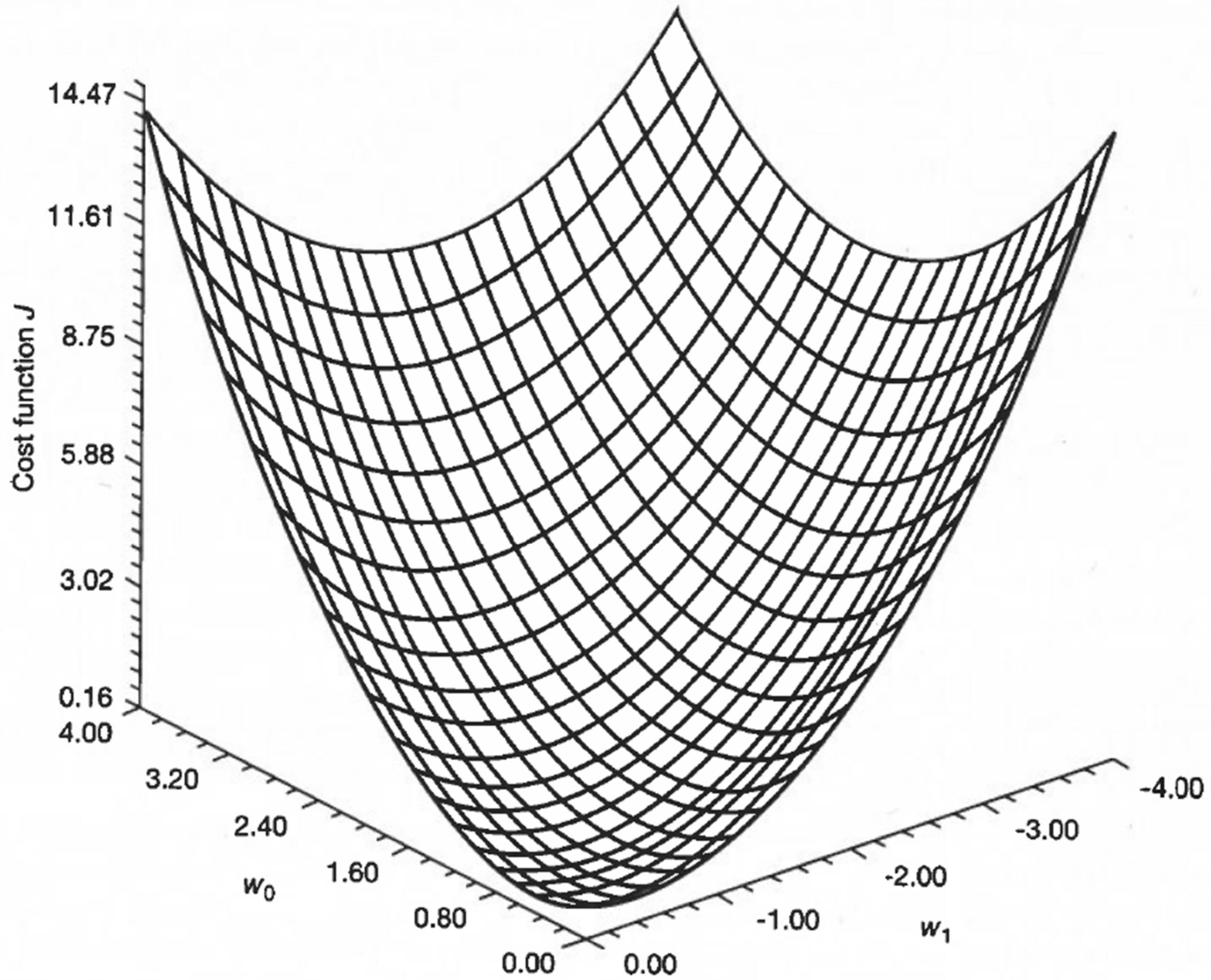


Figure 5.6 Error-performance surface of the two-tap transversal filter described in the numerical example.

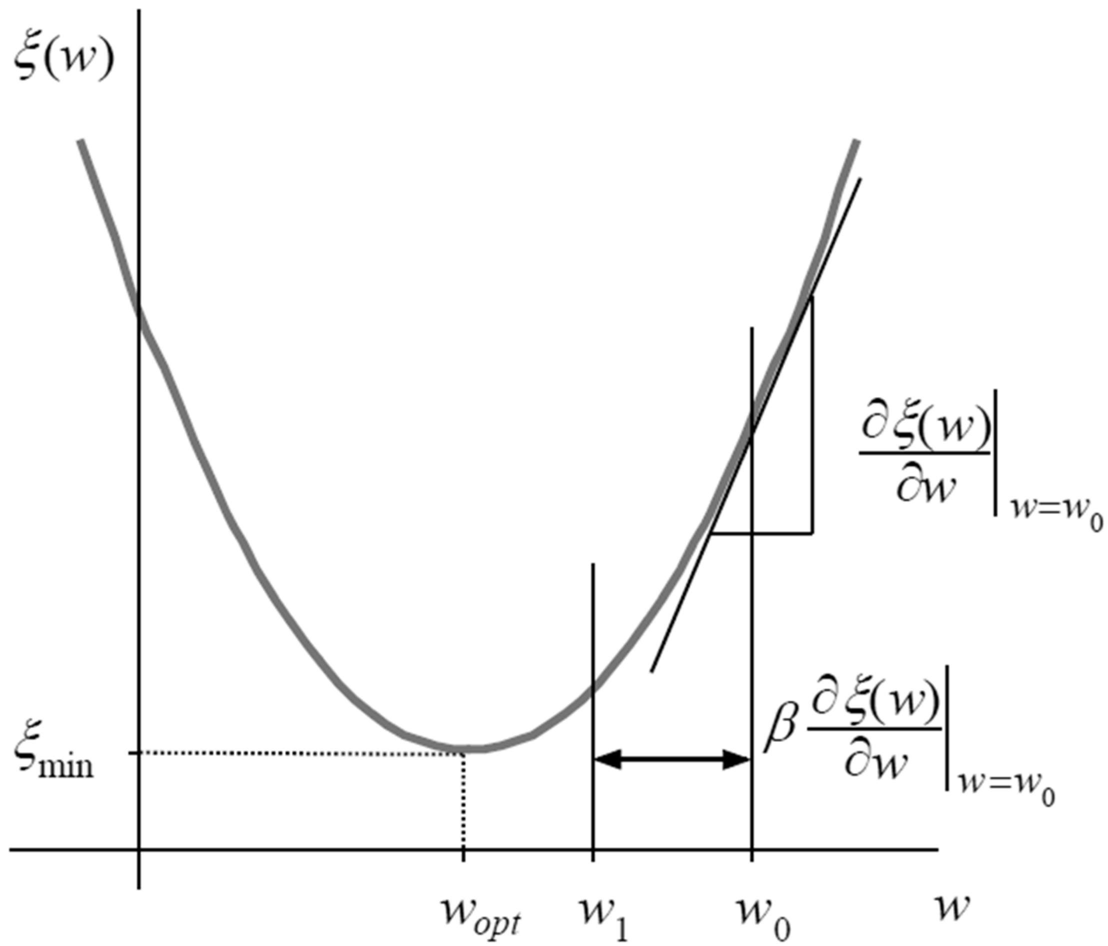
O método do gradiente

– Em vez de usarmos o procedimento determinístico anterior que é aplicável a sinais estacionários para os quais se conhecem previamente as estatísticas associadas, podemos, não conhecendo estas, optar por um método iterativo de aproximação ao filtro ótimo de Wiener.

– O método iterativo de adaptação mais conhecido que converge para a solução ótima (filtro de Wiener), é o método de gradiente mais negativo ("steppest gradient" = *direction of the negative of the gradient vetor*) que referiremos simplesmente pelo método do gradiente e que consiste no seguinte procedimento:

1. Parte-se de um valor inicial para os coeficientes do filtro, tipicamente o vetor nulo,
2. Calcula-se o vetor gradiente, determinado em ordem aos coeficientes do filtro no instante n,
3. Estimam-se os coeficientes do filtro para a próxima iteração modificando a estimativa atual no sentido oposto ao do vetor gradiente,
4. Retorna-se ao ponto 2 e repete-se o processo.

- Ilustração do método do gradiente:



$$\underline{w}_{k+1} = \underline{w}_k - \beta \, \underline{\hat{\nabla}}_k$$

– De acordo com este procedimento, será então: $\boxed{h_{n+1}(k) = h_n(k) + \frac{1}{2}\mu\left[-\nabla_k\left[J(n)\right]\right]}$

em que μ é uma constante real e positiva que traduz o *passo de adaptação* do algoritmo.

Como vimos anteriormente, $\boxed{\nabla_k\left[J(n)\right] = -2p(+k) + 2\sum_{\ell=0}^{N-1} h_n(\ell) r(\ell-k)}$ porém, como não conhecemos as estatísticas, podemos optar por uma expressão alternativa usando a definição de *p(k)* e de *r(ℓ-k)* e admitindo dados e coeficientes reais:

$$\nabla_k\left[J(n)\right] = -2E\left\{d(n)x(n-k)\right\} + 2\sum_{\ell=0}^{N-1} h_n(\ell) E\left\{x(n-k)x(n-\ell)\right\}$$

$$\nabla_k\left[J(n)\right] = -2E\left\{x(n-k)\left[d(n) - \sum_{\ell=0}^{N-1} h_n(\ell)x(n-\ell)\right]\right\} = -2E\left\{x(n-k)e(n)\right\}$$

Este resultado traduz o princípio da ortogonalidade: para a solução ótima, *x(n-k)* e *e(n)* são ortogonais. Como corolário desta afirmação, resulta que para a solução ótima, *y(n)* e *e(n)* são ortogonais.

Será então: $\boxed{h_{n+1}(k) = h_n(k) + \mu E\left\{x(n-k)e(n)\right\}}$

Esta é a solução do método iterativo de gradiente mais negativo que evolui suavemente para a solução ótima (*i.e.* para o filtro de Wiener).

O algoritmo LMS

– O algoritmo anterior presume a obtenção de estatísticas durante o procedimento iterativo e oferece a garantia de convergência suave para o filtro de Wiener. Podemos contudo ter, a partir do algoritmo anterior, uma outra aproximação à solução ótima baseada no gradiente "instantâneo" (dito *estocástico*), em que se elimina o operador de média: $\boxed{h_{n+1}(k) = h_n(k) + \mu\, x(n-k)e(n)}$

Dada a sua simplicidade, esta solução é muito popular e constitui o conhecido algoritmo de filtragem adaptativa LMS (de *Least Mean Squares*). Porém, o custo da simplicidade traduz-se em <u>ruído de gradiente</u> no cálculo recursivo de cada coeficiente do filtro adaptativo. Este ruído de gradiente pode conduzir (assumindo convergência):

1. Ou a uma solução aleatória do filtro adaptativo em torno do filtro ótimo de Wiener,
2. Ou a um deslocamento fixo do filtro adaptativo relativamente ao filtro ótimo (<u>*desalinhamento*</u>), comprometendo portanto o seu desempenho.

Estes aspetos são controlados através do passo de adaptação μ : um passo mais pequeno dá lugar a um menor ruído de gradiente o que minimiza o problema de desalinhamento, mas implica também, em contra-partida, uma convergência mais lenta para a solução ótima.

Para saber mais: há outros algoritmos de filtragem adaptativa que possuem melhor desempenho do que o LMS, *e.g.*, o NMLS e o *Recursive Least Squares* (RLS).

- Ilustração do impacto do passo de adaptação μ

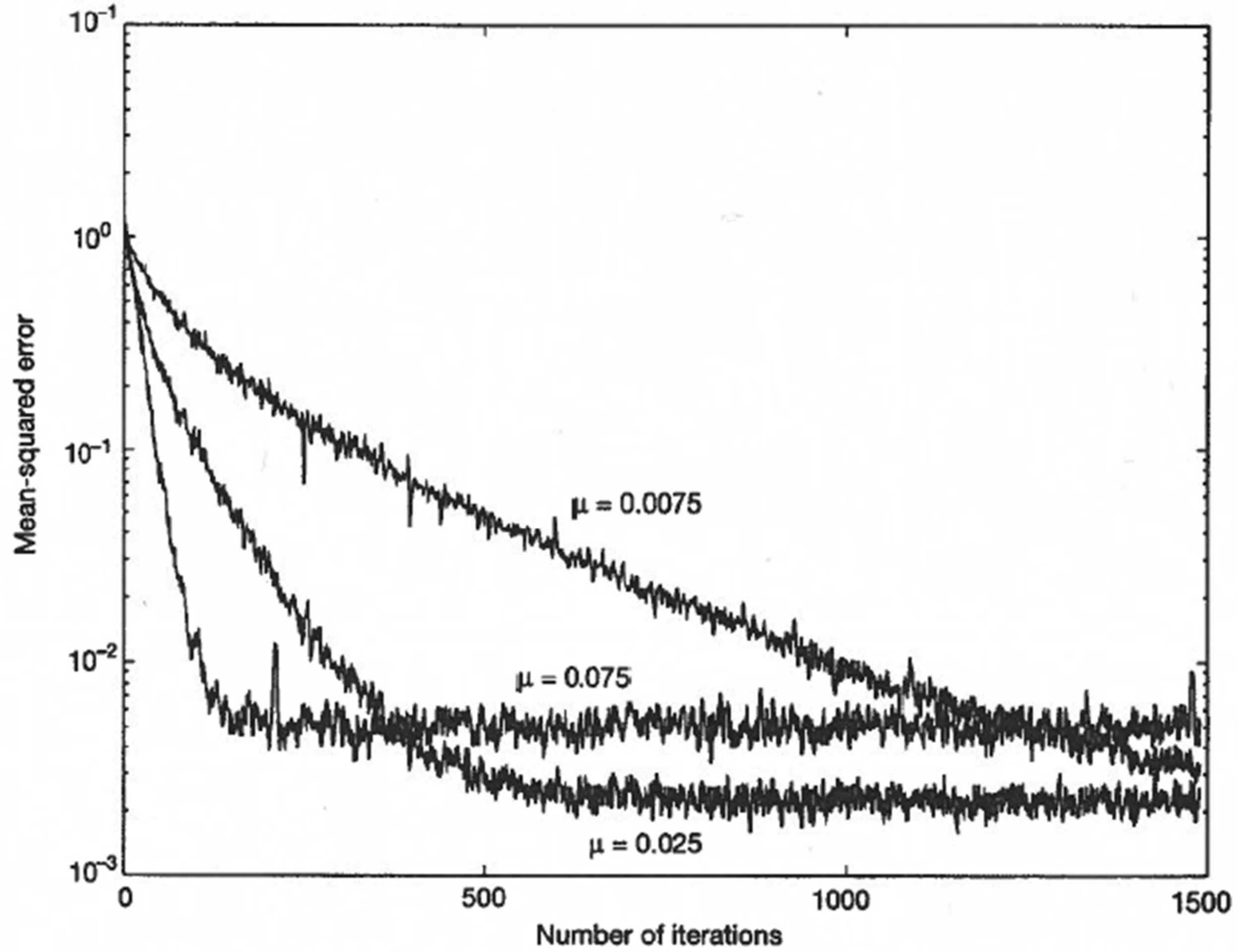


Figure 9.23 Learning curves of the LMS algorithm for adaptive equalizer with the number of taps $M = 11$, fixed eigenvalue spread, and varying step-size parameter μ.